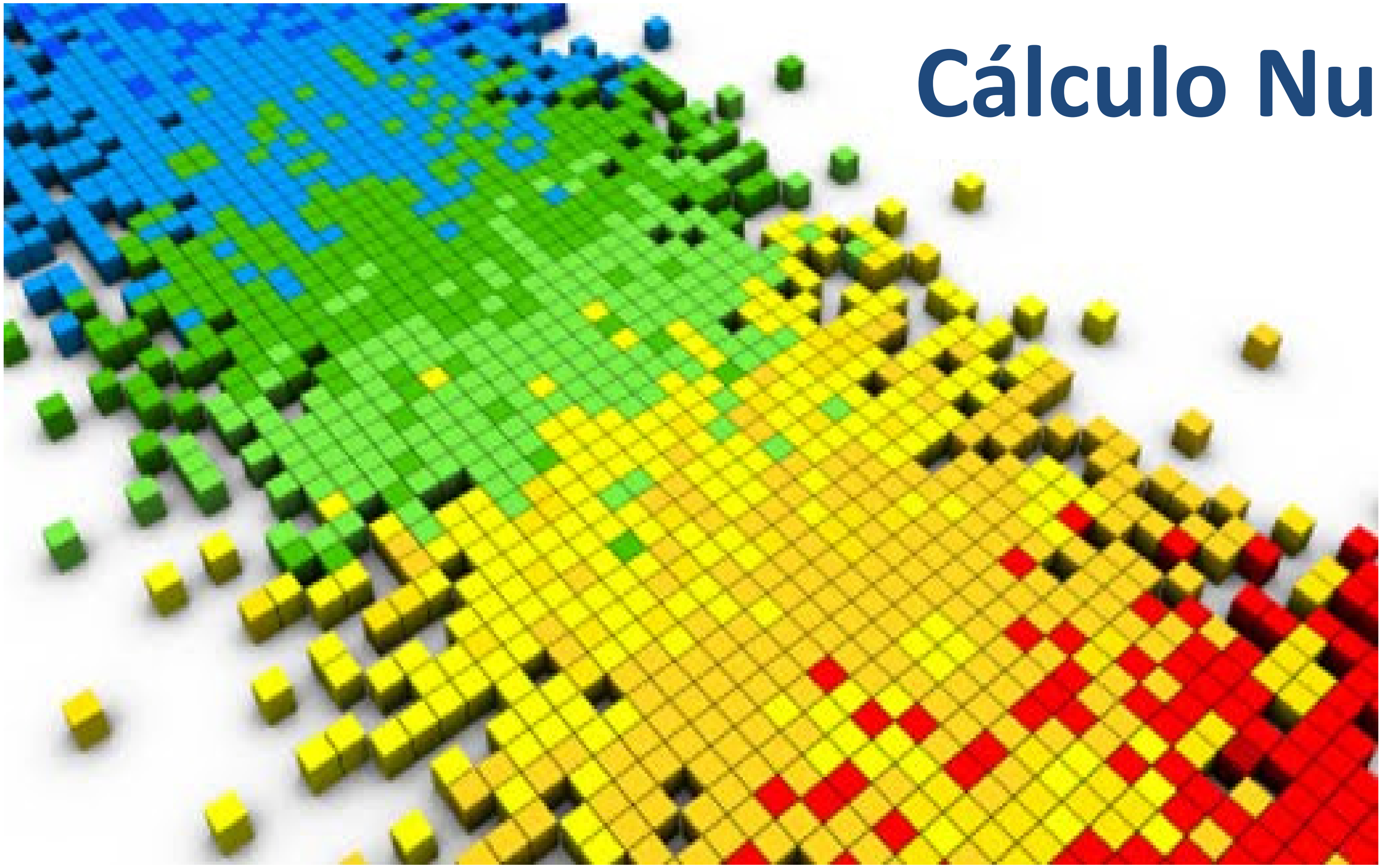

Cálculo Numérico

Aula 9 – Sistemas de Equações Lineares / Parte 2 – A=LU

2014.1 - 13/05/2014

Prof. Guilherme Amorim

gbca@cin.ufpe.br

UFPE

Centro de Informática U·F·P·E

Aula passada...

- Vimos como resolver sistemas de equações lineares utilizando 3 métodos:
  - Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Eliminação de Gauss-Jordan

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = b_n / a_{nn} \\ x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right) / a_{ii}, \quad i = (n-1), (n-2), \dots, 1. \end{cases}$$

E hoje?

- Processo de correção residual
- Método de decomposição LU

Processo de Correção Residual

- "O processo de correção residual consiste em fazer um tratamento na solução aproximada de modo que o resto r = b – Ax torne-se tão pequeno quanto possível."
- Seja o sistema: Ax = b
- x representa a solução exata do sistema:

$$x = (x_0 , x_1 , . . . , x_n)^T$$

- "Devido aos arredondamentos, entre outros erros, temos soluções aproximadas representadas por:

$$x^{(0)} = (x_0^{(0)} , x_1^{(0)} , . . . , x_n^{(0)})^T$$

Processo de Correção Residual

- "Considere $e^{(0)}$ uma correção residual para $x^{(0)}$"
- Temos $x = x^{(0)} + e^{(0)}$
- E temos que: $A(x^{(0)} + e^{(0)}) = b$
- Portanto: $A\, e^{(0)} = b - Ax^{(0)}$
- Chamando $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, temos: $Ae^{(0)} = r^{(0)}$
- Resolvendo esse novo sistema obtém-se uma solução aproximada $\hat{e}^{(0)}$
- Nova aproximação de x: $x^{(1)} = x^{(0)} + \hat{e}^{(0)}$

Processo de Correção Residual

- Porém, em razão das aproximações numéricas na solução de $Ae^{(0)} = r^{(0)}$, $\hat{e}^{(0)}$ não satisfaz a $A\hat{e}^{(0)} = r^{(0)}$.
- Existe um erro $e^{(1)} = e^{(0)} - \hat{e}^{(0)}$ ou $e^{(0)} = \hat{e}^{(0)} + e^{(1)}$
- Logo: $A\left[\hat{e}^{(0)} + e^{(1)}\right] = r^{(0)} \Rightarrow Ae^{(1)} = r^{(0)} - A\hat{e}^{(0)}$
- Fazendo $r^{(0)} - A\hat{e}^{(0)} = r^{(1)}$, temos: $Ae^{(1)} = r^{(1)}$
- $\hat{e}^{(1)}$é a solução aproximada de $Ae^{(1)} = r^{(1)}$
- Nova aproximação de x: $x^{(2)} = x^{(0)} + \hat{e}^{(0)} + \hat{e}^{(1)}$
- E assim sucessivamente...

Processo de Correção Residual

- O processo de refinamento pode ser repetido calculando-se $x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, \ldots$ para o erro ir se tornando cada vez menor.

Método de Decomposição LU

- Seja o sistema $Ax = b$
- No Método de Decomposição LU a matriz A é decomposta em duas matrizes L e U.
  - L: matriz triangular inferior
  - U: matriz triangular superior com os elementos da diagonal principal iguais a 1.
- Logo, $LUx = b$.
- Ou $Ux = y$ & $Ly = b$.

Exemplo

$$5x_1 - 10x_2 = 8$$
$$3x_1 - 4x_2 = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$Ly = b$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$5y_1 + 0y_2 = 8 \Rightarrow y_1 = 8/5$$

$$3y_1 + 2y_2 = -1$$

$$3 \times \frac{8}{5} + 2y_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -\frac{29}{10}$$

Exemplo

$Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/5 \\ -29/10 \end{bmatrix}$$

$$0x_1 + x_2 = -29/10 \Rightarrow x_2 = -29/10$$

$$x_1 - 2x_2 = 8/5 \Rightarrow x_1 = 8/5 - 29/5 \Rightarrow x_1 = -21/5$$

- Logo, $x_1 = -21/5$ e $x_2 = -29/10$

Pergunta:

Como calcular as matrizes L e U?

Representação de L & U

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- “A decomposição A = LU existirá e será única se as condições do Teorema 3.1 forem satisfeitas.”

Teorema 3.1

<u>Teorema 3.1</u>

Uma matriz de números reais, A, de ordem $n \times n$ tem uma decomposição LU se $det\,(A\,(1{:}\,k,\,1{:}\,k\,)) \neq 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Se a decomposição LU existe e A é não singular (admite inversa), então a decomposição LU é única e $det\,(A) = l_{11} \times l_{22} \times \ldots \times l_{nn}$.

$$det\,(A\,(1{:}\,k,\,1{:}\,k\,)) \neq 0$$

$$|a_{11}| \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \ldots\ |A| \neq 0$$

- A demonstração deste teorema pode ser vista em [4].

Obtendo L e U

- Como calculamos o produto de duas matrizes?

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj}$$

- Exemplo 3x3

$$LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtendo L e U

$$LV = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = l_{11} \times u_{11} + l_{12} \times u_{21} + l_{13} \times u_{31} = l_{11} \times u_{11} \\ a_{12} = l_{11} \times u_{12} + l_{12}\, u_{22} + l_{13} - u_{32} = l_{11}\, u_{12} \\ a_{13} = l_{11} \times u_{13} + l_{12} \times u_{23} + l_{13} \times u_{33} = l_{11}\, u_{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = l_{21} \times u_{11} + l_{22} \times u_{21} + l_{23} \times u_{31} = l_{21}\, u_{11} \\ a_{22} = l_{21}\, u_{12} + l_{22} \times u_{22} + l_{23} \times u_{32} = l_{21}\, u_{12} + l_{22} \\ a_{23} = l_{21}\, u_{13} + l_{22}\, u_{23} + l_{23} \times u_{33} = l_{21}\, u_{13} + l_{22}\, u_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31} = l_{31}\, u_{11} + l_{32}\, u_{21} + l_{33} \times u_{31} = l_{31}\, u_{11} \\ a_{32} = l_{31}\, u_{12} + l_{32}\, u_{22} + l_{33} \times u_{32} = l_{31}\, u_{12} + l_{32} \\ a_{33} = l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + l_{33} \times u_{33} = l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + l_{33} \end{cases}$$

Obtendo L e U

- Passo 1: Se j=1, min{i, j}=1

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^{1} l_{ik} u_{k1} = l_{i1} u_{11}$$

$$a_{i1} = l_{i1} \times u_{11} \quad \Rightarrow l_{i1} = a_{i1}$$

  - Os elementos da 1ª coluna de L são iguais aos da 1ª coluna de A.

Passo 1

$$LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = l_{11} \times u_{11} + l_{12} \times u_{21} + l_{13} \times u_{31} = l_{11} \times u_{11} \\ a_{12} = l_{11} \times u_{12} + l_{12}\, u_{22} + l_{13} \times u_{32} = l_{11}\, u_{12} \\ a_{13} = l_{11} \times u_{13} + l_{12} \times u_{23} + l_{13} \times u_{33} = l_{11}\, u_{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = l_{21} \times u_{11} + l_{22} \times u_{21} + l_{23} \times u_{31} = l_{21}\, u_{11} \\ a_{22} = l_{21}\, u_{12} + l_{22} \times u_{22} + l_{23} \times u_{32} = l_{21}\, u_{12} + l_{22} \\ a_{23} = l_{21}\, u_{13} + l_{22}\, u_{23} + l_{23} \times u_{33} = l_{21}\, u_{13} + l_{22}\, u_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31} = l_{31}\, u_{11} + l_{32}\, u_{21} + l_{33} \times u_{31} = l_{31}\, u_{11} \\ a_{32} = l_{31}\, u_{12} + l_{32}\, u_{22} + l_{33} \times u_{32} = l_{31}\, u_{12} + l_{32} \\ a_{33} = l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + l_{33} \times u_{33} = l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + l_{33} \end{cases}$$

Obtendo L e U

- Passo 2: Se i=1, min{i, j}=1

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{1} l_{1k} u_{kj} = l_{11} u_{1j} \Rightarrow a_{ij} = l_{11} u_{1j} \Rightarrow u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$$

  - Os elementos da primeira linha de U são a razão dos elementos da primeira linha de A por l_{11}.

Passo 2

$$LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & v_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = l_{11} \times u_{11} + l_{12} \times u_{21} + l_{13} \times u_{31} = l_{11} \times u_{11} \\ a_{12} = l_{11} \times u_{12} + l_{12}\, u_{22} + l_{13} - u_{32} = l_{11}\, u_{12} \\ a_{13} = l_{11} \times u_{13} + l_{12} \times u_{23} + l_{13} \times u_{33} = l_{11}\, u_{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = l_{21} \times u_{11} + l_{22} \times u_{21} + l_{23} \times u_{31} = l_{21}\, u_{11} \\ a_{22} = l_{21}\, u_{12} + l_{22} \times u_{22} + l_{23} \times u_{32} = l_{21}\, u_{12} + l_{22} \\ a_{23} = l_{21}\, u_{13} + l_{22}\, u_{23} + l_{23} \times u_{33} = l_{21}\, u_{13} + l_{22}\, u_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31} = l_{31}\, u_{11} + l_{32}\, u_{21} + l_{33} \times u_{31} = l_{31}\, u_{11} \\ a_{32} = l_{31}\, u_{12} + l_{32}\, u_{22} + l_{33} \times u_{32} = l_{31}\, u_{12} + l_{32} \\ a_{33} = l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + l_{33} \times u_{33} = l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + l_{33} \end{cases}$$

Obtendo L e U

- Passo 3: Se j=2, i≥j=2 , min{i, j}=2

$$a_{i2} = \sum_{k=1}^{2} l_{ik} u_{kj} = l_{i1} u_{12} + l_{i2} u_{22}$$

$$u_{22} = 1 \Rightarrow l_{i2} = a_{i2} - l_{i1} u_{12}$$

  - Definimos a segunda coluna de L
  - a_{i2}:conhecido, pois é elemento de A
  - l_{i1}:conhecido, pois é elemento da primeira coluna de L
  - u_{12}:conhecido, pois é elemento da primeira linha de U (passo 2)

Passo 3

$$LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = l_{11} \times u_{11} + l_{12} \times u_{21} + l_{13} \times u_{31} = l_{11} \times u_{11} \\ a_{12} = l_{11} \times u_{12} + l_{12}\, u_{22} + l_{13} \times u_{32} = l_{11}\, u_{12} \\ a_{13} = l_{11} \times u_{13} + l_{12} \times u_{23} + l_{13} \times u_{33} = l_{11}\, u_{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = l_{21} \times u_{11} + l_{22} \times u_{21} + l_{23} \times u_{31} = l_{21}\, u_{11} \\ a_{22} = l_{21}\, u_{12} + l_{22} \times u_{22} + l_{23} \times u_{32} = l_{21}\, u_{12} + l_{22} \\ a_{23} = l_{21}\, u_{13} + l_{22}\, u_{23} + l_{23} \times u_{33} = l_{21}\, u_{13} + l_{22}\, u_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31} = l_{31}\, u_{11} + l_{32}\, u_{21} + l_{33} \times u_{31} = l_{31}\, u_{11} \\ a_{32} = l_{31}\, u_{12} + l_{32}\, u_{22} + l_{33} \times u_{32} = l_{31}\, u_{12} + l_{32} \\ a_{33} = l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + l_{33} \times u_{33} = l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + l_{33} \end{cases}$$

Obtendo L e U

- Passo 4: se i=2, j>i=2 ; min{i, j}=2

$$a_{2j} = \sum_{k=1}^{2} l_{ik} u_{kj} = l_{21} u_{1j} + l_{22} u_{2j}$$

$$u_{2j} = \left(a_{2j} - l_{21} u_{1j} \right) / l_{22}$$

  - Definimos a segunda linha de U
  - a_{2j}: conhecido, pois vem da matriz A
  - l_{21}: conhecido do passo anterior
  - u_{1j}: conhecido do passo 2
  - l_{22}: conhecido do passo anterior

Passo 4

$$LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = l_{11} \times u_{11} + l_{12} \times u_{21} + l_{13} \times u_{31} = l_{11} \times u_{11} \\ a_{12} = l_{11} \times u_{12} + l_{12}\, u_{22} + l_{13} - u_{32} = l_{11}\, u_{12} \\ a_{13} = l_{11} \times u_{13} + l_{12} \times u_{23} + l_{13} \times u_{33} = l_{11}\, u_{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = l_{21} \times u_{11} + l_{22} \times u_{21} + l_{23} \times u_{31} = l_{21}\, u_{11} \\ a_{22} = l_{21}\, u_{12} + l_{22} \times u_{22} + l_{23} \times u_{32} = l_{21}\, u_{12} + l_{22} \\ a_{23} = l_{21}\, u_{13} + l_{22}\, u_{23} + l_{23} \times u_{33} = l_{21}\, u_{13} + l_{22}\, u_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31} = l_{31}\, u_{11} + l_{32}\, u_{21} + l_{33} \times u_{31} = l_{31}\, u_{11} \\ a_{32} = l_{31}\, u_{12} + l_{32}\, u_{22} + l_{33} \times u_{32} = l_{31}\, u_{12} + l_{32} \\ a_{33} = l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + l_{33} \times u_{33} = l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + l_{33} \end{cases}$$

Passo 5

$$LU = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = l_{11} \times u_{11} + l_{12} \times u_{21} + l_{13} \times u_{31} = l_{11} \times u_{11} \\ a_{12} = l_{11} \times u_{12} + l_{12}\, u_{22} + l_{13} - u_{32} = l_{11}\, u_{12} \\ a_{13} = l_{11} \times u_{13} + l_{12} \times u_{23} + l_{13} \times u_{33} = l_{11}\, u_{13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} = l_{21} \times u_{11} + l_{22} \times u_{21} + l_{23} \times u_{31} = l_{21}\, u_{11} \\ a_{22} = l_{21}\, u_{12} + l_{22} \times u_{22} + l_{23} \times u_{32} = l_{21}\, u_{12} + l_{22} \\ a_{23} = l_{21}\, u_{13} + l_{22}\, u_{23} + l_{23} \times u_{33} = l_{21}\, u_{13} + l_{22}\, u_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31} = l_{31}\, u_{11} + l_{32}\, u_{21} + l_{33} \times u_{31} = l_{31}\, u_{11} \\ a_{32} = l_{31}\, u_{12} + l_{32}\, u_{22} + l_{33} \times u_{32} = l_{31}\, u_{12} + l_{32} \\ a_{33} = l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + l_{33} \times u_{33} = l_{31}\, u_{13} + l_{32}\, u_{23} + l_{33} \end{cases}$$

Obtendo L e U

- Generalizando...

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}, i \geq j$$

$$u_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} \right) / l_{ii} \quad i < j$$

- Na seguinte ordem: l_{i1}, u_{1j} ,l_{i2} ,u_{2j},...

Exemplo 3.4

Exemplo 3.4 - Reconsideremos o seguinte sistema de equações lineares apresentado no **Exemplo 3.2** . Resolvê-lo usando o método de decomposição $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 8 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Inicialmente faremos a decomposição da matriz dos coeficientes do sistema (matriz $\boldsymbol{A}$) nas matrizes $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{U}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Exemplo 3.4

- 1ª coluna de L

$l_{11} = a_{11} = 5$, $l_{21} = a_{21} = 3$, $l_{31} = a_{31} = 2$

$$L = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & & 0 \\ 2 & & \end{bmatrix}$$

- 1ª linha de U

$u_{12} = a_{12}/l_{11} = 2/5$, $u_{13} = a_{13}/l_{11} = 1/5$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.4

- 2ª coluna de L

$$l_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} = 6 - 3 \times \frac{2}{5} = \frac{24}{5}$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31} u_{12} = -4 - 2 \times \frac{2}{5} = -\frac{24}{5}$$

$$L = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 24/5 & 0 \\ 2 & -24/5 & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha de U

$$u_{23} = (a_{23} - l_{21} u_{13}) / l_{22}$$

$$= \left(-2 - 3 \times \frac{1}{5}\right) / \tfrac{24}{5} = -\frac{13}{24}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -13/24 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.4

- 3ª coluna de L

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$$

$$= 10 - 2 \times \frac{1}{5} - \left(-24/5\right) \times \left(-13/24\right) = 7$$

$$L = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 24/5 & 0 \\ 2 & -24/5 & 7 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -13/24 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.4

$Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 24/5 & 0 \\ 2 & -24/5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 8/5$

$y_2 = 11/24$

$y_3 = 1$

$Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & -13/24 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/5 \\ 11/24 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1$

Comentário sobre o método:

- "Este método é particularmente muito importante quando o usuário tem muitos sistemas de equações lineares com os mesmos coeficientes das variáveis, mudando apenas os valores do vetor independente. Isto se deve ao fato de que não é necessário repetir a decomposição LU já realizada."

Exercício

- Resolva o seguinte sistema utilizando o método de decomposição LU

$$5x_1 + 6x_2 + 12x_3 = -1$$
$$2x_1 - 3x_2 = -1$$
$$4x_1 + x_2 - x_3 = 6.$$

Bibliografia

- [1] Silva, Zanoni; Santos, José Dias. Métodos Numéricos, 3ª Edição. Universitária, Recife, 2010.
- [2] Notas de aula do prof. Divanilson Campelo
- [3] Ruggiero, Márcia; Lopes, Vera. Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais, 2ª Edição. Pearson. São Paulo, 1996.
- [4] G.H. Gulob; C.F. Van Loan. Matrix Computations. Lhon Hopkins, Baltimore, 2ª edição, 1989.